Ueber ein

neues Coordinatensystem.

Inaugural-Dissertation,

der

philosophischen Facultät der Universität Rostock

vorgelegt von

Dr. Friedrich Wilhelm Frankenbach
aus Idstein.

Riga.
Druck von W. F. Häcker.
1869.

Von der Censur erlaubt. Riga, den 16. Januar 1869.

Einleitung.

Die analytische Geometrie war seit ihrem Begründer Descartes dasjenige allgemeine Hilfsmittel, welches sich allen geometrischen Vorstellungen, den alten wie den neuen, mit Erfolg anpassen liess; und in jener Epoche, wo die Infinitesimal-Rechnung in's Leben trat, erhielt sie allein bei Vernachlässigung anderer grossen Erzeugnisse auf dem Gebiete der Mathematik ihre volle Bedeutung, bildet sogar das eigentliche Fundament der Lehren des Leibnitz und Newton.

Seit jener Zeit hat sie ihr Gebiet nach allen Seiten hin erweitert. An Stelle des Cartesischen Coordinaten-Systems hat man neue Systeme treten lassen, welcher Umstand aus dem Bestreben hervorgeht, den von der Wal des Coordinatensystems abhängigen Gleichungen der Gebilde die möglichst einfache und zur Rechnung bequemste Form zu geben. In dieser Hinsicht ward, nachdem von Euler und Monge die geometrischen Construktionen in den Hintergrund gedrängt, dagegen die Combinationen und Transformationen gegebener Gleichungen, sowie deren Interpretation an ihre Stelle rückten, durch Einführung der Polarcoordinaten der erste entscheidende Schritt gethan.

Die erstaunlich rasche Entwicklung und Vervollkommnung, deren sich die analytische Geometrie besonders innerhalb der letzten vier Jahrzehnte zu erfreuen hat, verdanken wir der Einführung neuer Coordinatensysteme, zu denen Moebius und Pluecker in ihren grossartigen Werken den Grundstein legten.

Seitdem hat man sich vielfach mit neuen Coordinatensystemen beschäftigt*) und ist durch Einführung derselben zu einer bedeutenden Anzal bemerkenswerter Theorien und Resultate gelangt. Obwol keines der neuern Systeme so allgemeinen Eingang in die Wissenschaft gefunden, wie das Parallel-Coordinatensystem, so hat doch jedes derselben den Nutzen, dass es sich zur Lösung gewisser Probleme am Vorzüglichsten eignet oder zur Verallgemeinerung und Auffindung neuer Sätze dient.

Vorliegendes System dürfte zur Untersuchung von Pol und Polare in Bezug auf den Kreis und der projectivischen Eigenschaften der einem solchen eingeschriebenen Vielecke besonders geeignet erscheinen. Denn da man immer mit Vorteil die merkwürdigsten Punkte einer Figur in die Coordinatenaxen verlegt, so ist von vornherein ersichtlich, dass die Untersuchung der Punkte eines Kreises vereinfacht und erleichtert wird, wenn man den Kreis dem System als Coordinatenbasis zu Grunde legt. Letzteres ist hier geschehen und dabei der erhebliche Vorteil erlangt, dass das System homogene Gleichungen liefert und somit die Anwendung der Determinanten gestattet.

Schliesslich sei noch erwähnt, dass u. a. der in § 5, Nr. 5 ausgesprochene Satz und die sich daran knüpfenden Folgerungen dem Verfasser bis jetzt noch unbekannt gewesen und sich wol als neu erweisen dürften.

Riga, den 2./14. November 1868.

---

*) Moebius, der barycentrische Calcul, 1827.
Pluecker, Anal. geom. Entwicklungen (Vol. II), 1832.
— , Ueber ein neues Coordinatensystem (Crelle's Journal V).
Gudermann, Lehrbuch der anal. Sphärik, 1830.
Druckenmüller, die Uebertragungsprincipien, 1842.
Sommer, Winkelcoordinaten, 1848.
Stammer, de novo systemate coordinatarum, 1849.
Swellengrebel, Neun verschiedene Coordinatensysteme, 1853.
Lamé, Leçons sur les Coordinnées curvilignes etc., 1859.

§ 1.

Erläuterung des Systems.

Man nehme einen Kreis, die Basis des Coordinatensystems, mit zwei begrenzten, auf einander senkrecht stehenden Durchmessern XX′ und YY′ als völlig bestimmt und unveränderlich an und setze — der Einfachheit halber — den Radius des Kreises gleich der Einheit.

Versteht man nun unter Drehungsrichtung im positiven Sinn diejenige von rechts durch oben nach links und misst die Punkte des Basisumfangs vom Endpunkte X des Durchmessers XX′ aus durch positive Bogen, so können alle Punkte der Ebene der Basis in Bezug auf letztere festgelegt werden.

§ 2.

Der Punkt.

Nr. 1. Den gegebenen Punkt P (Fig. 1) verbinde man mit dem Coordinatencentrum O und fälle vom Schnittpunkt Q des Radiusvectors OP (Fig. 1. α.) oder dessen Verlängerung (Fig. 1. β.) mit dem Basisumfang das Lot QR $\perp$ XX′, so ist der Punkt P durch den Radiusvector OP und die Strecken OR und QR unzweideutig bestimmt. Letztere beiden Strecken, welche beziehungsweise den cosinus und sinus von arc. XQ $= \omega$ darstellen, mögen mit x und y, der reciproke Werth $\frac{1}{p}$ des Radiusvectors OP $=$ p mit z bezeichnet und x, y, z die Coordinaten des Punktes P genannt werden. Die Gleichungen desselben lauten dann:

$$x = \cos\,\omega,\ y = \sin\,\omega,\ z = \frac{1}{p} \quad \ldots\ldots (1)\ \alpha.$$

Indem man die Vorzeichen x und y entsprechend den vier Basisquadranten bestimmt, erhält man an Stelle von (1) α. vier von einander verschiedene Punktgleichungen:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & x = +\cos\,\omega,\ y = +\sin\,\omega,\ z = \frac{1}{p} \\ \text{II.} & x = -\cos\,\omega,\ y = +\sin\,\omega,\ z = \frac{1}{p} \\ \text{III.} & x = -\cos\,\omega,\ y = -\sin\,\omega,\ z = \frac{1}{p} \\ \text{IV.} & x = +\cos\,\omega,\ y = -\sin\,\omega,\ z = \frac{1}{p_{,}} \end{array}\right\} \ldots\ldots (2)\ \alpha.$$

welche sämmtliche in der Basisebene liegende Punkte darstellen.

Nr. 2. Obwol die Annahme eines negativen z von vornherein nicht geboten erscheint, möge folgende Betrachtung zeigen, wie ein etwa negativ auftretendes z zu interpretiren ist.

Man ziehe die zum Punkte P gehörenden Berührenden PS und PS′ (Fig. 1. α.), resp. die durch P bestimmte kürzeste Sehne SS′ (Fig. 1. β.) und stelle die Gleichungen des Punktes durch trigonometrische Funktionen von arc. XS = a und arc. XS′ = b dar in der Form

$$\left.\begin{aligned} x &= \cos\frac{a+b}{2},\ y = \sin\frac{a+b}{2},\ z = \cos\frac{a-b}{2} \\ x &= \cos\frac{a+b}{2},\ y = \sin\frac{a+b}{2},\ z = \sec\frac{a-b}{2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1)\ \beta.$$

Unter Berücksichtigung der durch die Quadranten bedingten Vorzeichen erhält man das Schema:

Quadr.	x	y	z
I	$\begin{matrix}+\\(-)\end{matrix}$	$\begin{matrix}+\\(-)\end{matrix}$	$\begin{matrix}+\\(-)\end{matrix}$
II	$-$	$+$	$+$
III	$-$	$-$	$+$
IV	$\begin{matrix}+\\(-)\end{matrix}$	$\begin{matrix}-\\(+)\end{matrix}$	$\begin{matrix}+\\(-)\end{matrix}$

$\ldots\ldots$ (2) β.

Indem also der Punkt rechts von der in OX gezogenen Berührenden, oder innerhalb des über OX als Durchmesser construirten Kreises liegt und alsdann im I. Quadranten $\omega = \frac{a+b}{2} - \pi$, im IV. Quadranten $\omega = \frac{a+b}{2} + \pi$ ist, wird z negativ und die Coordinaten des Basispunktes (x, y) wechseln zugleich ihr Zeichen, d. h. der Basispunkt (x, y) springt bei einem Zeichenwechsel des z auf die der früheren diametral entgegengesetzte Seite.

Im Falle eines negativen z hat man den durch den zugehörigen Basispunkt (x, y) bestimmten Radiusvector über den

Mittelpunkt hinaus (rückwärts) zu verlängern und auf dieser Verlängerung den absoluten Wert von z abzutragen.

Die Bedeutung der Gleichungen (2) bleibt demnach ungeändert, wenn man sämmtliche Vorzeichen in die entgegengesetzten umwandelt.

Nr. 3. Sind die Gleichungen eines beliebigen Punktes P gegeben in der Form:

$$x = \cos\omega,\ y = \sin\omega,\ z = \frac{1}{p}, \quad . \ . \ (3)\ \alpha.$$

so erkennt man sofort, dass die Gleichungen

$$x = \cos\omega,\ y = \sin\omega,\ z = p \quad . \ . \ . \ (3)\ \beta.$$

einen zweiten Punkt P′ darstellen, welcher mit P auf demselben Radiusvector, und zwar ausserhalb, auf, oder innerhalb der Kreisperipherie liegt, je nachdem P innerhalb, auf, oder ausserhalb derselben sich befindet; auch erkennt man leicht, wie zu einem gegebenen Punkte (3) α. der zweite Punkt (3) β. construirt werden kann. Die durch die Gleichungen (3) α. und (3) β. dargestellten beiden Punkte sollen in Bezug auf den Kreis reciproke Punkte heissen. (Ein Basispunkt ist sich demnach selbst reciprok.)

Nr. 4. Man nennt einen Punkt den Pol einer Geraden in Bezug auf den Kreis, wenn die Gerade durch seinen reciproken Punkt geht und auf dem dadurch bestimmten Radiusvector senkrecht steht. Die Gerade heisst dann die Polare des Punktes in Bezug auf den Kreis. (Die Polare eines Basispunktes fällt demnach mit der Berührenden zusammen.)

Je nachdem der Pol ausserhalb, auf, oder innerhalb der Kreisperipherie liegt, schneidet seine Polare dieselbe in zwei reellen und von einander verschiedenen, in zwei reellen und zusammenfallenden, oder in zwei imaginären Punkten.

§ 3.

Die gerade Linie.

Nr. 1. *Es soll die Gleichung der Geraden entwickelt werden.*

Um zur Gleichung der Geraden (L) (Fig. 1) zu gelangen, setze man die Coordinaten des Fusspunktes P′ des vom Mittelpunkt O auf sie gefällten Lotes als bekannt voraus; damit sind zugleich die Coordinaten (x′, y′, z′) seines reciproken Punktes P, des Poles der Geraden, gegeben. Durch die

Coordinaten dieses Poles können wir nun die Gleichung der Geraden (L) ausdrücken.

Sei $x' = \cos \omega$, $y' = \sin \omega$, $z' = \frac{1}{p} = OP'$.

Verbindet man nun einen beliebigen Punkt T der Geraden, welcher die laufenden Coordinaten x, y, z besitze, mit dem Coordinatencentrum O, so ergiebt sich, wenn Q' den durch OT bestimmten Basispunkt bezeichnet, die Relation

$$\frac{OP'}{OT} = \cos (\text{arc. } XQ' - \omega),$$

$$\frac{1}{OT} \cdot \frac{1}{p} = \cos \text{ arc. } XQ' \cos \omega + \sin \text{ arc. } XQ' \sin \omega.$$

Unter Berücksichtigung der Werte der hier vorkommenden Faktoren erhält man die Gleichung der Geraden in der Form:

$$xx' + yy' - zz' = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

welche sowohl in Beziehung auf die Variabeln, als auch auf die Constanten (Coordinaten des Poles) homogen erscheint. Je nach der Lage des Basispunktes erhält man vier verschiedene Formen für die Gleichung der Geraden:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & xx' + yy' - zz' = 0 \\ \text{II.} & -xx' + yy' - zz' = 0 \\ \text{III.} & -xx' - yy' - zz' = 0 \\ \text{IV.} & xx' - yy' - zz' = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

welche, wie man sich leicht überzeugt, sich in der allgemeinen Form

$$x \cos \omega + y \sin \omega - \frac{z}{p} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

vereinigen lassen.

Ersetzt man hierin ω und p durch die beiden Bogen a und b, welche durch die zu P gehörigen Berührenden, resp. Berührungssehne, bestimmt werden, so erhält man für die Gleichung der Geraden die Formen (s. § 2, (2) β.):

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha. & x \cos \frac{a+b}{2} + y \sin \frac{a+b}{2} - z \cos \frac{a-b}{2} = 0 \\ \beta. & x \cos \frac{a+b}{2} + y \sin \frac{a+b}{2} - z \sec \frac{a-b}{2} = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (4)$$

und zwar stellt (4) α. diejenige Gerade dar, welche den Kreis (Basis) in zwei reellen und von einander verschiedenen Punkten, dagegen (4) β. diejenige, welche ihn in zwei ima-

ginären Punkten schneidet. Erstere Gerade möge daher reelle Secante, letztere imaginäre Secante der Basis heissen.

Für Basispunkte wird $p = \frac{1}{p} = 1$ und die Gleichung der (Berührenden) Polaren dieser Punkte lautet allgemein:

$$x \cos \omega + y \sin \omega - z = 0$$

Ist $x' = \cos a,\ y' = \sin a,\ z' = 1$
$x'' = \cos b,\ y'' = \sin b,\ z'' = 1$ . . . . . (5) α.

so erhält man:

$x \cos a + y \sin a - z = 0$
$x \cos b + y \sin b - z = 0$ . . . . . (6) α.

Nr. 2. I. *Es soll die Gleichung einer Geraden gesucht werden, welche durch den Punkt x', y', z' geht.*

Die gesuchte Gleichung habe die allgemeine Form:

$$x\xi + y\eta - z\zeta = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

wo ξ, η, ζ, die Coordinaten des Pols, als Unbekannte zu betrachten sind. Soll nun der Punkt x', y', z' in dieser Geraden liegen, so müssen seine Coordinaten der Gleichung (7) genügen, was durch die Bedingung ausgedrückt wird:

$$x'\xi + y'\eta - z'\zeta = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Da nur eine Bedingung gegeben ist, so können die Unbekannten aus (7) und (8) nicht ermittelt werden.

Durch Elimination von ζ aus diesen beiden Gleichungen resultirt:

$$\left.\begin{array}{l} \xi \begin{vmatrix} x, & z \\ x', & z' \end{vmatrix} + \eta \begin{vmatrix} y, & z \\ y', & z' \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x, & z \\ x', & z' \end{vmatrix} + \tan \mu \begin{vmatrix} y, & z \\ y', & z' \end{vmatrix} = 0 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Hierin bleibt tan μ unbestimmt, was zu erwarten war, da unendlich viele Gerade durch einen Punkt gehen.

II. Beachtet man, dass die Gleichung

$$x x' + y y' - z z' = 0$$

die Polare des Punktes x', y', z' darstellt und dass Gleichung (8) zugleich die Bedingung dafür enthält, dass der Punkt ξ, η, ζ in dieser Geraden liegt, so gelangt man zu dem Satz:

Die Polare eines beliebigen Punktes einer Geraden geht durch den Pol der Geraden; oder: *die Polare eines Punktes ist der geometrische Ort der Pole aller durch den Punkt gezogenen Geraden.*

Nr. 3. I. *Die Gleichung der Verbindungslinie zweier Punkte soll entwickelt werden.*

Die gesuchte Gleichung habe die Form

$$x\,\xi + y\,\eta - z\,\zeta = 0.$$

Wenn nun die Punkte x', y', z' und x'', y'', z'' in dieser Geraden liegen sollen, so müssen die Relationen gelten:

$$x'\,\xi + y'\,\eta - z'\,\zeta = 0,$$
$$x''\,\xi + y''\,\eta - z''\,\zeta = 0.$$

Nach Elimination der Unbekannten aus diesen drei Gleichungen erhält man die gesuchte Gleichung in der Form:

$$x \begin{vmatrix} y', & z' \\ y'', & z'' \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} z', & x' \\ z'', & x'' \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} x', & y' \\ x'', & y'' \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)\ \alpha.$$

Sollen die Coefficienten von x, y, z die Coordinaten des Pols dieser Geraden darstellen, so muss die Gleichung (10) mit einem Faktor

$$k = \sqrt{\frac{1}{\begin{vmatrix} x', & z' \\ y'', & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z', & x' \\ z'', & x'' \end{vmatrix}^2}}$$

multiplicirt werden.

Bezeichnet man die Coefficienten der Veriabeln in (10) der Kürze halber beziehungsweise mit $\Delta_{(x)}$, $\Delta_{(y)}$, $\Delta_{(z)}$, so ist $k = \sqrt{\frac{1}{\Delta_{(x)}^2 + \Delta_{(y)}^2}}$ und Gleichung (10) erhält die Form:

$$k\,(x\,\Delta_{(x)} + y\,\Delta_{(z)} + z\,\Delta_{(z)}) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)\ \beta.$$

II. *Nach Nr. 2. II. stellt Gleichung (10) zugleich die Polare des Schnittpunktes der zu x', y', z' und x'', y'', z'' gehörigen Polaren dar.*

Um dies direkt zu beweisen, entwickle man aus den Gleichungen der Polaren beider Punkte:

$$x\,x' + y\,y' - z\,z' = 0$$
$$x\,x'' + y\,y'' - z\,z'' = 0$$

die Verhältnisse der Coordinaten ihres gemeinschaftlichen Schnittpunktes und erhält unter Anwendung der in I. gebrauchten Abkürzungen

$$\frac{x_1}{z_1} = -\frac{\Delta_{(x)}}{\Delta_{(z)}},\ \frac{y_1}{z_1} = -\frac{\Delta_{(y)}}{\Delta_{(z)}};$$
$$x_1 = k\,\Delta_{(x)},\ y_1 = k\,\Delta_{(z)},\ z_1 = -k\,\Delta_{(z)}.$$

Die Gleichung der Polare dieses Schnittpunktes ist aber identisch mit (10).

Nr. 4. I. *Es soll die Gleichung der Verbindungslinie der Basispunkte (5) α. gesucht werden.*

Nach der vorhergehenden Nummer lautet dieselbe:

$$k\left\{x\begin{vmatrix}\sin a, 1\\ \sin b, 1\end{vmatrix}+y\begin{vmatrix}1, \cos a\\ 1, \cos b\end{vmatrix}+z\begin{vmatrix}\cos a, \sin a\\ \cos b, \sin b\end{vmatrix}\right\}=0 \quad . \quad (11)\,\alpha.$$

oder aufgelöst:

$$k\,[x(\sin a-\sin b)+y(\cos b-\cos a)+z\sin(b-a)]=0$$

$$k\left\{x\cos\frac{a+b}{2}+y\sin\frac{a+b}{2}-z\cos\frac{a-b}{2}\right\}2\sin\frac{a-b}{2}=0,$$

$$x\cos\frac{a+b}{2}+y\sin\frac{a+b}{2}-z\cos\frac{a-b}{2}=0.$$

$$\left(\text{Hier ist } k=\frac{1}{2\sin\frac{a-b}{2}}.\right)$$

Diese Gleichung stimmt, wie im Voraus zu erwarten war, mit (4) α., der Gleichung der reellen Secante, überein.

II. Um in ähnlicher Weise zur Gleichung [(4) β.] der imaginären Secante zu gelangen, entwickle man aus der Gleichung (4) β. und derjenigen des Kreises die Coordinaten der imaginären Schnittpunkte und findet

$$x=\sec\frac{a-b}{2}\left(\cos\frac{a+b}{2}\mp i\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}\right)$$

$$y=\sec\frac{a-b}{2}\left(\sin\frac{a+b}{2}\pm i\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}\right)$$

$$z=1.$$

Die z-Coordinate ist demnach reell und es ist

$$x_1^2+y_1^2=1,\ x_2^2+y_2^2=1;$$

daher können wir kürzer schreiben

$$\left.\begin{aligned}x_1&=\cos a i,\ y_1=\sin a i,\ z_1=1\\ x_2&=\cos b i,\ y_2=\sin b i,\ z_2=1\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)\,\beta.$$

Die Polaren dieser (conjugirten) imaginären Schnittpunkte haben dann die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}x\cos a i+y\sin a i-z&=0\\ x\cos b i+y\sin b i-z&=0\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)\,\beta.$$

und zwar können diese Gleichungen als die in den imaginären Schnittpunkten (der Secante (4) β. mit der Basis) construirten Berührenden angesehen werden. Dieselben schneiden sich in einem reellen Punkt, dem Pol der Secante (4) β., denn vermittelst Anwendung von Nr. 3. erhält man die Gleichung der Verbindungslinie der Punkte (5) β. in der Form

$$k\left\{x\begin{vmatrix}\sin a_i, 1\\ \sin b_i, 1\end{vmatrix}+y\begin{vmatrix}1, \cos a_i\\ 1, \cos b_i\end{vmatrix}+z\begin{vmatrix}\cos a_i, \sin a_i\\ \cos b_i, \sin b_i\end{vmatrix}\right\}=0\,(11)\beta.$$

welche nach Auflösung der Determinanten und Anwendung goniometrischer Umformungen die Gleichung (4) β. liefert, was a priori evident war.

$$\left(\text{In diesem Falle ist } k=\frac{1}{2i\sin\frac{a-b}{2}}.\right)$$

Nr. 5. *Es soll die Länge* l *des vom Punkte* x', y', z' *auf die Gerade*

$$x\xi+y\eta-z\zeta=0$$

gefällten Lotes gesucht werden.

Man lege durch den gegebenen Punkt eine mit der gegebenen Geraden parallele Gerade, so muss für dieselbe die Gleichung erfüllt sein:

$$x'\xi+y'\eta-z'(\zeta\mp 1)=0.$$

Hieraus findet man die gesuchte Länge des Lotes

$$l=\pm\frac{x'\xi+y'\eta-z'\zeta}{z'}\quad\ldots\ldots\quad(12)$$

wo das positive oder negative Zeichen zu nehmen ist, je nachdem der Punkt x', y', z' mit dem Coordinatenanfang auf derselben oder entgegengesetzten Seite der Geraden liegt.

Nr. 6. Es mögen noch folgende Sätze von Bedeutung hier Platz finden, deren Allgemeingültigkeit als erwiesen vorausgesetzt werden darf:

I. Wenn durch $U=0$, $U'=0$ die Gleichungen zweier Geraden dargestellt werden, so ist

$$\lambda U+\lambda' U'=0$$

die Gleichung einer durch ihren Schnittpunkt gehenden Geraden, worin λ und λ' beliebige Coefficienten bedeuten.

II. Sind $U=0$, $U'=0$, $U''=0$ die Gleichungen dreier Geraden, und λ, λ', λ'' drei Faktoren von der Beschaffenheit, dass identisch ist:

$$\lambda U+\lambda' U'+\lambda'' U''=0,$$

so schneiden sich die drei Geraden in einem Punkt.

III. Stellen $U=0$, $U'=0$, $U''=0$ drei in einem Punkt sich schneidende Gerade dar, so lassen sich immer drei Faktoren so bestimmen, dass die Identität:

$$\lambda U+\lambda' U'+\lambda'', U''=0$$

stattfindet.

IV. Ist l das von einem Punkte x, y, z auf eine Gerade $U = 0$ gefällte Lot, l′ ein von demselben Punkt aus auf eine zweite Gerade $U' = 0$ gefälltes Lot, so hat man (nach Nr. 5):

$$lz = \pm U,\ l'z = \pm U'$$ und daraus:

$$\frac{l}{l'} = \pm \frac{U}{U'}$$ oder

$$\left.\begin{aligned} l'U + lU' &= 0 \\ l'U - lU' &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Die durch die Gleichungen (13) dargestellten Geraden gehen durch den Schnittpunkt von U und U′ (s. I.) und bilden mit letztgenannten Geraden ein harmonisches Büschel.

Ist $l = l'$, so erhält man aus (13):

$$U + U' = 0$$
$$U - U' = 0,$$

und zwar repräsentiren diese Gleichungen die Halbirungslinien der von U und U′ gebildeten Winkel.

Nr. 7. Führt man für die Gleichungen der Berührenden (6) α. und (6) β. beziehungsweise die Abkürzungen ein:

$$\left.\begin{aligned} T_{(a)} &= 0 \\ T_{(b)} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} T_{(a_i)} &= 0 \\ T_{(b_i)} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

so müssen nach voriger Nummer

$$T_{(a)} + T_{(b)} = 0,\ T_{(a_i)} + T_{(b_i)} = 0$$

die imaginäre Secante (4) β., resp. reelle Secante (4) α. darstellen, welche Gleichungen beziehungsweise durch

$$S_i = 0,\ S = 0$$

abkürzend ausgedrückt werden sollen. In der Tat überzeugt man sich durch Anwendung einfacher goniometrischer Formeln von der Richtigkeit dieser Behauptung.

Jede der Differenzen

$$T_{(a)} - T_{(b)} = 0,\ T_{(a_i)} - T_{(b_i)} = 0$$

aber liefert die Verbindungslinie der Schnittpunkte der Tangentenpaare (6) α. und (6) β. in der Form

$$x \sin \frac{a+b}{2} - y \cos \frac{a+b}{2} = 0,\quad R = 0.$$

Diese Gerade ist der auf beiden Secanten senkrecht stehende Radiusvector. Sonach ist der von den imaginären Berührenden (6) β. gebildete Winkel gleich demjenigen, welchen das reelle Tangentenpaar (6) α. einschliesst.

Die Berücksichtigung der Werte für $\cos a_i$, $\cos b_i$, $\sin a_i$, $\sin b_i$ liefert an Stelle von

$$T_{(a\,i)} = 0,\ T_{(b\,i)} = 0$$

die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} S + i\,\frac{T_{(a)} - T_{(b)}}{2} &= 0 \\ S - i\,\frac{T_{(a)} - T_{(b)}}{2} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} S - i\,\sin\frac{a-b}{2}\,R &= 0 \\ S + i\,\sin\frac{a-b}{2}\,R &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Nr. 9. 1. *Es soll die Bedingung gesucht werden, die erfüllt sein muss, wenn drei Punkte in einer Geraden liegen.*

Die Gerade habe die Gleichung

$$x\xi + y\eta - z\zeta = 0.$$

Sollen nun die drei Punkte x', y', z'; x'', y'', z''; x''', y''', z''' in dieser Geraden liegen, so bestehen die Relationen:

$$\begin{aligned} x'\,\xi + y'\,\eta - z'\,\zeta &= 0 \\ x''\,\xi + y''\,\eta - z''\,\zeta &= 0 \\ x'''\,\xi + y'''\,\eta - z'''\,\zeta &= 0 \end{aligned}$$

woraus man die gesuchte Bedingungsgleichung durch Elimination von ξ, η, ζ in Form einer Determinante erhält:

$$\begin{vmatrix} x', & y', & z' \\ x'', & y'', & z'' \\ x''', & y''', & z''' \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

II. *Diese Gleichung (15) ist zugleich die Bedingung dafür, dass drei Gerade sich in einem Punkt schneiden.*

Obwol dies schon nach Nr. 2, II. evident ist, möge hier der direkte Beweis Platz finden:

Die Gleichungen der Polaren der drei Punkte (I.) sind:

$$\begin{aligned} xx' + yy' - zz' &= 0 \\ xx'' + yy'' - zz'' &= 0 \\ xx''' + yy''' - zz''' &= 0 \end{aligned}$$

und durch Elimination von x, y, z erhält man als Bedingung dafür, dass diese drei Gerade sich in einem Punkt schneiden, die Determinante (15).

§ 4.

Das Kreisviereck.

Nr. 1. Auf dem Umfange des (Basis-) Kreises (Fig. 2) seien vier Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$; $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}'$ gegeben, welche bez. die Coordinaten

$$\cos 2\mathfrak{a},\ \sin 2\mathfrak{a},\ 1;\ \cos 2\mathfrak{a}',\ \sin 2\mathfrak{a}',\ 1;$$
$$\cos 2\mathfrak{b},\ \sin 2\mathfrak{b},\ 1;\ \cos 2\mathfrak{b}',\ \sin 2\mathfrak{b}',\ 1$$

haben mögen, so können zunächst die Gleichungen der durch

diese Punkte bestimmten Berührenden, sowie der sechs (reellen) Sehnen $\overline{a\,a'}$, $\overline{b\,b'}$, $\overline{a'\,b}$, $\overline{b'\,a}$, $\overline{a\,b}$, $\overline{a'\,b'}$ durch diese Coordinaten ausgedrückt werden.

Wir bedienen uns der abkürzenden Bezeichnung, und zwar mögen

$$T_{(a)} = 0,\ T_{(a')} = 0,\ T_{(b)} = 0,\ T_{(b')} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

die Gleichungen der Berührenden und

$$\text{I.} \begin{cases} A = 0, \\ B = 0; \end{cases} \quad \text{II.} \begin{cases} A' = 0, \\ B' = 0; \end{cases} \quad \text{III.} \begin{cases} A'' = 0, \\ B'' = 0 \end{cases} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

die oben bezeichneten Sehnen der Reihe nach darstellen (s. § 3, (4) α.). Ausserdem seien die Hälften der begrenzten Sehnenstücke: sin (a — a'), sin (b — b'); sin (a' — b), sin(b' — a); sin (a — b), sin (a' — b') beziehungsweise mit α, β; α', β'; α'', β'' bezeichnet.

Sucht man nun nach § 3, Nr. 3. die Gleichungen der Polaren der Schnittpunkte der Linienpaare (2), welche bezüglich die gegenüberliegenden Seiten und Diagonalen eines Sehnenvierecks sind, so erhält man zunächst die Gleichung der Polare des Schnittpunktes $\mathfrak{P}'$ des Linienpaares I. in der Form:

$$\begin{aligned} x &\left| \begin{matrix} \sin(a + a'), & \cos(a - a') \\ \sin(b + b'), & \cos(b - b') \end{matrix} \right| + \\ y &\left| \begin{matrix} \cos(a - a'), & \cos(a + a') \\ \cos(b - b'), & \cos(b + b') \end{matrix} \right| + \\ z &\left| \begin{matrix} \cos(a + a'), & \sin(a + a') \\ \cos(b + b'), & \sin(b + b') \end{matrix} \right| = 0 \end{aligned}$$

Nach Auflösung der Determinanten erhält man hieraus vermittelst Anwendung goniometrischer Umformungen die beiden Formen:

α. $x\,[\sin(a-b)\cos(a'+b') + \sin(a'-b')\cos(a+b)] +$
$y\,[\sin(a-b)\sin(a'+b') + \sin(a'-b')\sin(a+b)] -$
$z\,[\sin(a-b)\cos(b'-b') + \sin(a'-b')\cos(a-b)] = 0,$

β. $x\,[\sin(a'-b)\cos(b'+a) - \sin(b'-a)\cos(a'+b)] +$
$y\,[\sin(a'-b)\sin(b'+a) - \sin(b'-a)\sin(a'+b)] -$
$z\,[\sin(a'-b)\cos(b'-a) - \sin(b'-a)\cos(a'-b)] = 0,$

woraus, wie man sich leicht überzeugt, durch entsprechende Vertauschung der Buchstaben die Gleichungen der Polaren der Punkte $\mathfrak{P}''$ und $\mathfrak{P}'''$, der Schnittpunkte der Paare II. und III., sich ergeben.

Vermittelst Anwendung der eingeführten Abkürzungen stellen sich dann die Gleichungen der Polaren der Schnittpunkte $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}''$, $\mathfrak{P}'''$ der drei Linienpaare (2) in den Formen dar:

$$\left.\begin{array}{llll} \alpha. & \alpha'' B'' + \beta'' A'' = 0 \\ \beta. & \alpha' B' - \beta' A' = 0 \end{array}\right\} P' = 0 \quad . \quad \text{I.}$$

$$\left.\begin{array}{llll} \alpha. & \alpha'' B'' - \beta'' A'' = 0 \\ \beta. & \alpha B - \beta A = 0 \end{array}\right\} P'' = 0 \quad . \quad \text{II.}$$

$$\left.\begin{array}{llll} \alpha. & \alpha B + \beta A = 0 \\ \beta. & \alpha' B' + \beta' A' = 0 \end{array}\right\} P''' = 0 \quad . \quad \text{III.}$$

. . (3)

Nach § 3, Nr. 3. sind die durch I. und II. dargestellten Geraden, als Polaren von $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{P}''$, die inneren Diagonalen $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}'\,\mathfrak{B}'$ des Tangentenvierecks; die Gerade III., als Polare von $\mathfrak{P}'''$, ist die Verbindungslinie der Schnittpunkte $\mathfrak{A}''$ und $\mathfrak{B}''$ der gegenüberliegenden Seiten $T_{(a)}$, $T_{(a')}$ und $T_{(b)}$, $T_{(b')}$ des Tangentenvierecks und somit dessen äussere Diagonale.

a) Die Vergleichung von I. α. mit II. α. lehrt, dass der Schnittpunkt $\mathfrak{P}'''$ der inneren Diagonalen des Sehnenvierecks mit demjenigen der inneren Diagonalen des Tangentenvierecks zusammenfällt und dass die vier Diagonalen A'', B'', P', P'' ein harmonisches Büschel bilden (s. § 3, Nr. 6).

b) Die Gleichungen I. β. und II. β. lassen beziehungsweise erkennen, dass P' durch $\mathfrak{P}''$ und umgekehrt P'' durch $\mathfrak{P}'$ geht. Demnach ist $\mathfrak{P}'''$ — der Schnittpunkt von P' und P'' — nicht allein Pol der äusseren Diagonale $\mathfrak{A}''\,\mathfrak{B}''$ des Tangentenvierecks, sondern auch der äusseren Diagonale $\mathfrak{P}'\,\mathfrak{P}''$ des Sehnenvierecks. Wir haben daher den Satz:

Die gegenüberliegenden Seiten der dem Kreis ein- und umgeschriebenen Vierecke schneiden sich paarweise in vier Punkten, welche in einer Geraden liegen. Diese Gerade ist die Polare des gemeinschaftlichen Schnittpunktes der inneren Diagonalen der beiden Vierecke.

Der Schnittpunkt je zweier Diagonalen des vollständigen Tangentenvierecks ist der Pol der dritten Diagonale desselben.

c) Aus den Gleichungspaaren I. β. und III. β., sowie II. β. und III. α. ist ersichtlich, dass je ein Paar gegenüberliegender Seiten des Sehnenvierecks harmonisch conjugirt ist zu der, beiden Vierecken gemeinschaftlichen, äusseren Diagonale und einer inneren Diagonale des Tangentenvierecks.

Nr. 2. Wir können den in Nr. 1. a) ausgesprochenen Satz auch direkt beweisen, indem wir die Gleichung der Verbindungslinie der Punkte $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{P}''$ bilden (§ 3, Nr. 3) und zeigen, dass dieselbe mit derjenigen [(3) III.] der Verbindungslinie der Schnittpunkte $\mathfrak{A}''$ und $\mathfrak{B}''$ übereinstimmt. Indem man in (3) I. α. und II. α. für A'' und B'' die ursprünglichen Werte einführt, erhält man die Gleichungen der Geraden $\mathfrak{P}'\,\mathfrak{P}''$ in der Form:

$$x\begin{vmatrix} \alpha''\sin(a'+b')+\beta''\sin(a+b), & \alpha''\cos(a'-b')+\beta''\cos(a-b) \\ \alpha''\sin(a'+b')-\beta''\sin(a+b), & \alpha''\cos(a'-b')-\beta''\cos(a-b) \end{vmatrix} +$$

$$y\begin{vmatrix} \alpha''\cos(a'-b')+\beta''\cos(a-b), & \alpha''\cos(a'+b')+\beta''\cos(a+b) \\ \alpha''\cos(a'-b')-\beta''\cos(a-b), & \alpha''\cos(a'+b')-\beta''\cos(a+b) \end{vmatrix} +$$

$$z\begin{vmatrix} \alpha''\cos(a'+b')+\beta''\cos(a+b), & \alpha''\sin(a'+b')+\beta''\sin(a+b) \\ \alpha''\cos(a'+b')-\beta''\cos(a+b), & \alpha''\sin(a'+b')-\beta''\sin(a+b) \end{vmatrix} = 0 \text{ oder vereinfacht:}$$

$$x\begin{vmatrix} \sin(a+b), & \cos(a-b) \\ \sin(a'+b'), & \cos(a'-b') \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} \cos(a-b), & \cos(a+b) \\ \cos(a'-b'), & \cos(a'+b') \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} \cos(a+b), & \sin(a+b) \\ \cos(a'+b'), & \sin(a'+b') \end{vmatrix} = 0$$

wo der Faktor $2\alpha''\beta''$ vernachlässigt worden ist; die so erhaltene Gleichung stellt aber, wie der Anblick lehrt, die Polare des Schnittpunktes $\mathfrak{P}'''$ des Linienpaares A'', B'' dar und ist identisch mit (3) III.

Nr. 3. Aus den Gleichungen der Polaren von $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{A}$ erhält man die Gleichung der Verbindungslinie $\mathfrak{P}'\,\mathfrak{A}$:

$$x\begin{vmatrix} \alpha'\sin(b'+a)-\beta'\sin(a'+b), & \alpha'\cos(b'-a)-\beta'\cos(a'-b) \\ \sin(a+a'), & \cos(a-a') \end{vmatrix} +$$

$$y\begin{vmatrix} \alpha'\cos(b'-a)-\beta'\cos(a'-b), & \alpha'\cos(b'+a)-\beta'\cos(a'+b) \\ \cos(a-a'), & \cos(a+a') \end{vmatrix} +$$

$$z\begin{vmatrix} \alpha'\cos(b'+a)-\beta'\cos(a'+b), & \alpha'\sin(b'+a)-\beta'\sin(a'+b) \\ \cos(a+a'), & \sin(a+a') \end{vmatrix} = 0$$

Diese Gleichung ergibt nach gehöriger Umformung

$$\alpha' \left\{ \begin{array}{l} x \left| \begin{array}{l} \sin(b' + a), \cos(b' - a) \\ \sin(a + a'), \cos(a - a') \end{array} \right| + \\ y \left| \begin{array}{l} \cos(b' - a), \cos(b' + a) \\ \cos(a - a'), \cos(a + a') \end{array} \right| + \\ z \left| \begin{array}{l} \cos(b' + a), \sin(b' + a) \\ \cos(a + a'), \sin(a + a') \end{array} \right| \end{array} \right\} -$$

$$\beta' \left\{ \begin{array}{l} x \left| \begin{array}{l} \sin(a' + b), \cos(a' - b) \\ \sin(a + a'), \cos(a - a') \end{array} \right| + \\ y \left| \begin{array}{l} \cos(a' - b), \cos(a' + b) \\ \cos(a - a'), \cos(a + a') \end{array} \right| + \\ z \left| \begin{array}{l} \cos(a' + b), \sin(a' + b) \\ \cos(a + a'), \sin(a + a') \end{array} \right| \end{array} \right\} = 0.$$

Man erkennt sofort, dass durch den Coefficienten von α' die Polare des Schnittpunktes der Geraden $\overline{b'a}$ und $\overline{a\,a'}$, durch den Coefficienten von β' die Polare des Schnittpunktes der Geraden $\overline{a'b}$ und $\overline{a\,a'}$ dargestellt wird, d. i. nach der Definition die Berührende in a, beziehungsweise a', wie auch bei der Auflösung der Determinanten erhellt. Wir erhalten daher die Gleichung der Verbindungslinie von $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{A}$ in der Form

$$\alpha' T_{(a)} - \beta' T_{(a')} = 0,\ A_0 = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

In derselben Weise ergibt sich durch entsprechende Vertauschung der Buchstaben die Gleichung der Verbindungslinie von $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{B}$:

$$\beta' T_{(b)} - \alpha' T_{(b')} = 0,\ B_0 = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Betrachtet man nun die Polare von $\mathfrak{P}'$ als Verbindungslinie von $\mathfrak{P}'''$ und $\mathfrak{A}$, so ergiebt sich aus (3) III. β. und der Gleichung ($A = 0$) der Polare von $\mathfrak{A}$ — analog dem Vorhergehenden — die Gleichung der Geraden $\mathfrak{P}'''\ \mathfrak{A}$ in der Form:

$$\alpha' T_{(a)} + \beta' T_{(a')} = 0,\ P' = 0 \quad \ldots \ldots \quad (6)\ \alpha.$$

während man für dieselben Gerade, als Verbindungslinie von $\mathfrak{P}'''$ mit $\mathfrak{B}$ betrachtet, die Gleichung

$$\beta' T_{(b)} + \alpha' T_{(b')} = 0,\ P' = 0 \quad \ldots \ldots \quad (6)\ \beta.$$

erhält.

Die Linienpaare (4) und (6) α., (5) und (6) β. bilden, wie die respektiven Gleichungen anzeigen, mit den Tangentenpaaren $T_{(a)} = 0$, $T_{(a')} = 0$ und $T_{(b)} = 0$, $T_{(b')} =$ je ein harmonisches Büschel und sind demnach harmonische Polaren des Kreises.

Es ist evident, dass auch die Gleichungen der durch $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}'$ gehenden Geraden P'', A_1 resp. P'', B_1 auf analoge Formen gebracht werden können und dass diese Linienpaare beziehungsweise mit den Tangentenpaaren $T_{(a')}$, $T_{(b)}$ und $T_{(b')}$, $T_{(a)}$ harmonische Büschel bilden, somit ebenfalls harmonische Polaren des Kreises sind.

Die Punktepaare $\mathfrak{P}''$, $\mathfrak{P}'''$; $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_0$; $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_0$ und $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}'''$; $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}_1$; $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{B}_1$ bilden je eine Involution, denn jedes der von $\mathfrak{P}'$ resp. $\mathfrak{P}''$ aus gezogenen Linienpaare — nach den betreffenden Punktepaaren — ist ein Paar harmonischer Polaren zu dem von $\mathfrak{P}'$ resp. $\mathfrak{P}''$ bedingten Tangentenpaar.

Daher bilden auch die Linienpaare P'', P'''; A, A_0; B, B_0 und P', P'''; A', A_1; B', B_1 je eine Involution.

§ 5.

Das Kreissechseck.

Nr. 1. Seien auf dem Umfang des (Basis)- Kreises 6 Punkte a, a', b, b', c, c' gegeben mit den zugehörigen Bogen: $2a$, $2a'$, $2b$, $2b'$ $2c$, $2c'$, so können die Gleichungen der durch diese Punkte bestimmten 15 Sehnen sämmtlich durch trig. Funktionen der Bogen ausgedrückt werden. Sie sind alle von der Form:

$$x \cos(a + a') + y \sin(a + a') - z \cos(a - a') = 0$$

wo an die Stelle von a und a' nach und nach die Combinationen von je zweien der gegebenen halben Bogen treten.

Wir führen auch hier die abkürzende Bezeichnung ein und bezeichnen die Gleichungen der Geraden:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{b\,c'},\ \overline{c\,a'},\ \overline{a\,b'} \\ \overline{b'\,c},\ \overline{c'\,a},\ \overline{a'\,b} \\ \overline{a\,a'},\ \overline{b\,b'},\ \overline{c\,c'} \\ \overline{b\,c},\ \overline{c\,a},\ \overline{a\,b} \\ \overline{b'\,c'},\ \overline{c'\,a'},\ \overline{a'\,b'} \end{array}\right\} \text{ bezüglich mit } \left\{\begin{array}{ll} A = 0, & B = 0, \ C = 0; \ (1) \\ A' = 0, & B' = 0, \ C' = 0; \ (2) \\ A'' = 0, & B'' = 0, \ C'' = 0; \ (3) \\ A^0 = 0, & B^0 = 0, \ C^0 = 0; \ (4) \\ A^1 = 0, & B^1 = 0, \ C^1 = 0. \ (5) \end{array}\right.$$

Durch diese 15 Geraden werden 60 Sechsecke bestimmt, welche die 6 gegebenen Punkte zu Ecken haben.

Betrachten wir zunächst das Sechseck $a\,a'\,b\,b'\,c\,c'$, für welches wir (s. Hesse „Vorlesungen aus der anal. Geom. in der Ebene," p. 119) die Bezeichnung

$$\frac{a\ b\ c}{b'\ c'\ a'}$$

einführen wollen, worin im Zäler die Buchstaben ohne, im Nenner diejenigen, ihnen gegenüberliegenden, mit Index vorkommen, so dass also durch die Buchstaben der Verticalreihen drei Diagonalen (1) des Sechsecks bezeichnet werden. Dieses Sechseck wird gebildet aus den Seiten (2) und (3).

Wir wollen für dasselbe den Pascal'schen Satz beweisen, welcher lautet:

Die gegenüberliegenden Seiten des Kreissechsecks schneiden sich paarweise in drei Punkten, welche in einer Geraden liegen.

Beweis I. Man bilde die Gleichungen der Polaren der Schnittpunkte der gegenüberliegenden Seiten

$$A', A''; B', B''; C', C'',$$

zunächst in den symbolischen Formen*):

$$\begin{pmatrix} a & a' \\ b' & c \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} b & b' \\ c' & a \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} c & c' \\ a' & b \end{pmatrix} = 0.$$

Bezeichnet man nun die cosinusse der halben Summen der den Geraden (1), (2), (3), (4), (5) entsprechenden Bogenstücke bezüglich mit

$a_0, b_0, c_0; a'_0, b'_0, c'_0; a''_0, b''_0, c''_0; a^0_0, b^0_0, c^0_0; a^1_0, b^1_0, c^1_0;$

die sinusse dieser halben Summen dagegen mit

$a_1, b_1, c_1; a'_1, b'_1, c'_1; a''_1, b''_1, c''_1; a^0_1, b^0_1, c^0_1; a^1_1, b^1_1, c^1_1;$

die cosinusse der halben Differenzen mit

$a_2, b_2, c_2; a'_2, b'_2, c'_2; a''_2, b''_2, c''_2; a^0_2, b^0_2, c^0_2; a^1_2, b^1_2, c^1_2$

und die sinusse der halben Differenzen mit

$\alpha, \beta, \gamma; \alpha', \beta', \gamma'; \alpha'', \beta'', \gamma''; \alpha^0, \beta^0, \gamma^0; \alpha^1, \beta^1, \gamma^1,$

so erhält man die gesuchten Gleichungen in den Formen:

$$\left.\begin{array}{l} x\,(\gamma b_0 - \beta c_0) + \\ y\,(\gamma b_1 - \beta c_1) - \\ z\,(\gamma b_2 - \beta c_2) = 0. \\ x\,(\alpha c_0 - \gamma a_0) + \\ y\,(\alpha c_1 - \gamma a_1) - \\ z\,(\alpha c_2 - \gamma a_2) = 0. \\ x\,(\beta a_0 - \alpha b_0) + \\ y\,(\beta a_1 - \alpha b_1) - \\ z\,(\beta a_2 - \alpha b_2) = 0. \end{array}\right\} \alpha. \qquad \left.\begin{array}{l} x\,(\gamma^1 b^0_0 - \beta^0 c^1_0) + \\ y\,(\gamma^1 b^0_1 - \beta^0 c^1_1) - \\ z\,(\gamma^1 b^0_2 - \beta^0 c^1_2) = 0. \\ x\,(\alpha^1 c^0_0 - \gamma^0 a^1_0) + \\ y\,(\alpha^1 c^0_1 - \gamma^0 a^1_1) - \\ z\,(\alpha^1 c^0_2 - \gamma^0 a^1_2) = 0. \\ x\,(\beta^1 a^0_0 - \alpha^0 b^1_0) + \\ y\,(\beta^1 a^0_1 - \alpha^0 b^1_1) - \\ z\,(\beta^1 a^0_2 - \alpha^0 b^1_2) = 0. \end{array}\right\} \beta. \quad (6)$$

*) Sind allgemein φ und ψ, φ' und ψ' die Schnittpunkte zweier Sehnen mit der Basis, so möge die Gleichung der Polare des Durchschnitts dieser beiden Sehnen durch das Symbol $\begin{pmatrix} \varphi & \psi \\ \varphi' & \psi' \end{pmatrix} = 0$ ausgedrückt werden.

In diesen Gleichungen sind die Buchstaben symmetrisch verteilt und man kann aus jeder einzelnen die beiden übrigen durch cyklische Vertauschung der Buchstaben erhalten.

Bildet man aus dem System linearer Gleichungen (6) α. die Determinante, so erhält man

$$D = -\begin{vmatrix} \gamma b_0 - \beta c_0, & \gamma b_1 - \beta c_1, & \gamma b_2 - \beta c_2 \\ \alpha c_0 - \gamma a_0, & \alpha c_1 - \gamma a_1, & \alpha c_2 - \gamma a_2 \\ \beta a_0 - \alpha b_0, & \beta a_1 - \alpha b_1, & \beta a_2 - \alpha b_2 \end{vmatrix}$$

Eine Determinante ändert ihren Wert nicht, wenn man die Elemente einer Reihe zu den mit einem beliebigen Faktor multiplicirten Elementen einer andern Reihe addirt.

Multiplicirt man nun die Zeilen der Determinante D der Reihe nach mit α, β, γ, so erhält man nach diesem Satz:

$\alpha\ \beta\ \gamma\ D = 0$, ergo

$D = 0$.

Die drei Polaren der Schnittpunkte gegenüberliegender Seiten schneiden sich daher in einem Punkt und ihre Pole liegen in einer Geraden, deren Gleichung wir jetzt entwickeln werden:

Beweis II. Bildet man die Gleichungen der durch die drei Schnittpunkte gegenüberliegender Seiten bestimmten drei Geraden, so überzeugt man sich, dass dieselben identisch sind, die drei Geraden daher in eine Gerade zusammenfallen.

Die Gleichung der Verbindungslinie der Schnittpunkte der Geraden A', A'' und B', B'' lautet, unter Berücksichtigung von (6) α.:

$$x\begin{vmatrix} \gamma b_1 - \beta c_1, & \gamma b_2 - \beta c_2 \\ \gamma a_1 - \alpha c_1, & \gamma a_2 - \alpha c_2 \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} \gamma b_2 - \beta c_2, & \gamma b_0 - \beta c_0 \\ \gamma a_2 - \alpha c_2, & \gamma a_0 - \alpha c_0 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} \gamma b_0 - \beta c_0, & \gamma b_1 - \beta c_1 \\ \gamma a_0 - \alpha c_0, & \gamma a_1 - \alpha c_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Nach Zerlegung und gehöriger Umformung erhält man hieraus:

$$\left[\left\{ x\begin{vmatrix} a_1, & a_2 \\ b_1, & b_2 \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} a_2, & a_0 \\ b_2, & b_0 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} a_0, & a_1 \\ b_0, & b_1 \end{vmatrix} \right\} \gamma + \left\{ x\begin{vmatrix} b_1, & b_2 \\ c_1, & c_2 \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} b_2, & b_0 \\ c_2, & c_0 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} b_0, & b_1 \\ c_0, & c_1 \end{vmatrix} \right\} \alpha + \left\{ x\begin{vmatrix} c_1, & c_2 \\ a_1, & a_2 \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} c_2, & c_0 \\ a_2, & a_0 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} c_0, & c_1 \\ a_0, & a_1 \end{vmatrix} \right\} \beta \right] \gamma = 0 \quad . \quad . \quad (7)$$

wo γ wegdividirt werden kann. Die nehmliche Gleichung

erhält man auch, wenn man die Schnittpunkte B′, B″ mit C′, C″ oder C′, C″ mit A′, A″ verbindet; nur wird dann α resp. β anstatt γ als gemeinschaftlicher Faktor ausgeschieden.

Die Gerade, deren Gleichung in (7) dargestellt ist, heisst Pascal'sche Gerade; wir können ihre Gleichung kürzer schreiben:

$$\alpha\begin{pmatrix} c\,a' \\ a\,b' \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} a\,b' \\ b\,c' \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} b\,c' \\ c\,a' \end{pmatrix} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

oder analog der Bezeichnung des Sechsecks:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b' & c' & a' \end{pmatrix} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Anm. Man erkennt leicht das Gesetz, nach welchem (8) aus (9) abgeleitet werden kann:

Man multiplicire die Hälften der drei — durch die Verticalreihen (9) bestimmten — begrenzten Diagonalen des Sechsecks der Reihe nach mit den Gleichungen — oder deren Symbolen — der Polaren der Schnittpunkte, welche durch die jeweiligen beiden übrigen Diagonalen bestimmt werden. Diese Hälften der Diagonalen, die sich immer durch sinusse (α, β . . .) ausdrücken lassen, haben das positive oder negative Vorzeichen, je nachdem die in den Verticalreihen (9) stehenden Buchstaben in direkter oder umgekehrter alphabetischer (cyklischer) Ordnung folgen.

Beweis III. Vermittelst Anwendung der Methode der abgekürzten Bezeichnung erhält man, wenn die in (6) dargestellten Geraden:

$$\text{I. } \alpha.\ \begin{cases} \gamma\,B - \beta\,C = 0 \\ \alpha\,C - \gamma\,A = 0 \\ \beta\,A - \alpha\,B = 0 \end{cases} \qquad \beta.\ \begin{cases} \gamma^1\,B^0 - \beta^0\,C^1 = 0 \\ \alpha^1\,C^0 - \gamma^0\,A^1 = 0 \\ \beta^1\,A^0 - \alpha^0\,B^1 = 0 \end{cases} \quad . \quad . \quad (10)$$

bezüglich mit

$$\text{I. } \mathfrak{A} = 0,\ \mathfrak{B} = 0,\ \mathfrak{C} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

bezeichnet werden, die Bedingungsgleichung:

$$\text{I. } \alpha\,\mathfrak{A} + \beta\,\mathfrak{B} + \gamma\,\mathfrak{C} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Die Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ schneiden sich daher in einem Punkt und ihre Pole liegen in einer Geraden, deren Gleichung in den beiden Formen erscheint [s. Formel (7)]:

$$\text{I. } \alpha.\ \begin{cases} \alpha\,(\alpha'\,A'' + \alpha''\,A') + \\ \beta\,(\beta'\,B'' + \beta''\,B') + \\ \gamma\,(\gamma'\,C'' + \gamma''\,C') = 0, \end{cases} \qquad \beta.\ \begin{cases} \alpha\,(\beta^0\,C^1 + \gamma^1\,B^0) + \\ \beta\,(\gamma^0\,A^1 + \alpha^1\,C^0) + \\ \gamma\,(\alpha^0\,B^1 + \beta^1\,A^0) = 0. \end{cases} \quad (13)$$

oder wenn die Gleichungen der Polaren der Ecken des Diagonaldreiecks mit

$$\text{I.}\quad \mathfrak{A}_0 = 0,\ \mathfrak{B}_0 = 0,\ \mathfrak{C}_0 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad ; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

bezeichnet werden,

$$\text{I.}\quad \alpha\mathfrak{A}_0 + \beta\mathfrak{B}_0 + \gamma\mathfrak{C}_0 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Zugleich erhellt, dass die durch

$$\left.\begin{array}{l}\mathfrak{A}=0,\ \mathfrak{A}_0=0;\\ \mathfrak{B}=0,\ \mathfrak{B}_0=0;\\ \mathfrak{C}=0,\ \mathfrak{C}_0=0\end{array}\right\}\ \text{dargestellten Paare bezüglich harmonisch sind zu}\ \left\{\begin{array}{l}B^0=0,\ C^1=0;\\ C^0=0,\ A^1=0;\\ A^0=0,\ B^1=0.\end{array}\right\} \quad (16)$$

Der Pascal'sche Satz gilt für jedes der 60 Kreissechsecke und der Beweis kann aus einem der gegebenen für alle übrigen analog dem vorhergehenden oder durch entsprechende Vertauschung der Buchstaben abgeleitet werden.

Sonach giebt es 60 Pascal'sche Gerade.

Nr. 2. Aus dem Symbol $\frac{a\ b\ c}{b'\ c'\ a'}$ erhält man durch cyklische Vertauschung der Buchstaben des Nenners die Symbole zweier anderen Sechsecke:

$$\frac{a\ b\ c}{c'\ a'\ b''} \quad \frac{a\ b\ c}{a'\ b'\ c''}$$

deren gegenüberliegende Seiten bezüglich sind:

$$A'', A;\ B'', B;\ C'', C;$$
$$A, A';\ B, B';\ C, C'.$$

Die Gleichungen der Polaren der Schnittpunkte dieser Seitenpaare sind:

$$\text{II.}\ \alpha.\ \left\{\begin{array}{l}\gamma'\ B' - \beta'\ C' = 0\\ \alpha'\ C' - \gamma'\ A' = 0\\ \beta'\ A' - \alpha'\ B' = 0\end{array}\right. \quad \beta.\ \left\{\begin{array}{l}\beta^1\ C^0 - \gamma^0\ B^1 = 0\\ \gamma^1\ A^0 - \alpha^0\ C^1 = 0\\ \alpha^1\ B^0 - \beta^0\ A^1 = 0\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (10)$$

entsprechend dem ersten der beiden Sechsecke und

$$\text{III.}\ \alpha.\ \left\{\begin{array}{l}\gamma''\ B'' - \beta''\ C'' = 0\\ \alpha''\ C'' - \gamma''\ A'' = 0\\ \beta''\ A'' - \alpha''\ B'' = 0\end{array}\right. \quad \beta.\ \left\{\begin{array}{l}\alpha^1\ A^0 - \alpha^0\ A^1 = 0\\ \beta^1\ B^0 - \beta^0\ B^1 = 0\\ \gamma^1\ C^0 - \gamma^0\ C^1 = 0\end{array}\right\} \quad (10)$$

entsprechend dem letzten Sechsecke. Führt man für die Polaren der Schnittpunkte der Gegenseiten die abkürzenden Bezeichnungen ein:

$$\left.\begin{array}{l}\text{II.}\quad \mathfrak{A}' = 0,\ \mathfrak{B}' = 0,\ \mathfrak{C}' = 0;\\ \text{III.}\quad \mathfrak{A}'' = 0,\ \mathfrak{B}'' = 0,\ \mathfrak{C}'' = 0\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

so ergeben sich die Bedingungsgleichungen

$$\left.\begin{array}{l}\text{II.}\quad \alpha'\ \mathfrak{A}' + \beta'\ \mathfrak{B}' + \gamma'\ \mathfrak{C}' = 0,\\ \text{III.}\quad \alpha''\ \mathfrak{A}'' + \beta''\ \mathfrak{B}'' + \gamma''\ \mathfrak{C}'' = 0,\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

woraus hervorgeht, dass die den beiden Sechsecken entsprechenden Schnittpunkte gegenüberliegender Seiten je in einer (Pascal'schen) Geraden liegen.

Die Gleichungen dieser beiden Pascal'schen Geraden erhält man aus den Symbolen

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c' & a' & b' \end{pmatrix} = 0, \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 0$$

(nach pag. 20) beziehungsweise:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{II. } \alpha. & \left\{\begin{array}{l} \alpha' (\alpha'' A - \alpha A'') + \\ \beta' (\beta'' B - \beta B'') + \\ \gamma' (\gamma'' C - \gamma C'') = 0, \end{array}\right. \quad \beta. \left\{\begin{array}{l} \alpha' (\gamma^0 B^1 + \beta^1 C^0) + \\ \beta' (\alpha^0 C^1 + \gamma^1 A^0) + \\ \gamma' (\beta^0 A^1 + \alpha^1 B^0) = 0 \end{array}\right. \\ \text{III. } \alpha. & \left\{\begin{array}{l} \alpha'' (\alpha A' + \alpha' A) + \\ \beta'' (\beta B' + \beta' B) + \\ \gamma'' (\gamma C' + \gamma' C) = 0, \end{array}\right. \quad \beta. \left\{\begin{array}{l} \alpha'' (\alpha^0 A^1 + \alpha^1 A^0) + \\ \beta'' (\beta^0 B^1 + \beta^1 B^0) + \\ \gamma'' (\gamma^0 C^1 + \gamma^1 C^0) = 0 \end{array}\right. \end{array}\right\} \quad (13)$$

Bezeichnet man die Gleichungen der Polaren der Eckpunkte der aus den Seiten (1) resp. (2) gebildeten Dreiecke, welche bezüglich Diagonaldreiecke der betrachteten beiden Sechsecke sind, mit

$$\left.\begin{array}{ll} \text{II.} & \mathfrak{A}'_0 = 0,\ \mathfrak{B}'_0 = 0,\ \mathfrak{C}'_0 = 0 \\ \text{III.} & \mathfrak{A}''_0 = 0,\ \mathfrak{B}''_0 = 0,\ \mathfrak{C}''_0 = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

so erhält man die Gleichungen der Pascal'schen Geraden in den Formen:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{II.} & \alpha' \mathfrak{A}'_0 + \beta' \mathfrak{B}'_0 + \gamma' \mathfrak{C}'_0 = 0 \\ \text{III.} & \alpha'' \mathfrak{A}''_0 + \beta'' \mathfrak{B}''_0 + \gamma''_0 \mathfrak{C}''_0 = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Aus den Gleichungen (13) α. I. II. III. ergiebt sich aber, wenn man die Gleichungen der drei Pascal'schen Geraden bezüglich mit

$$r_0 = 0,\ r'_0 = 0,\ r''_0 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

bezeichnet, die Identität:

$$r_0 + r'_0 - r''_0 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Die drei Pascal'schen Geraden (r_0) schneiden sich daher in einem Punkt. Ein solcher Schnittpunkt, welcher dreien Pascal'schen Geraden gemeinsam ist, heisst Steiner'scher Punkt.

Die sechzig Kreissechsecke zerfallen in 20 Gruppen zu je dreien, welchen 3 in einem Punkt sich schneidende Pascal'sche Gerade entsprechen. Es gibt daher 20 Steiner'sche Punkte.

Nr. 3. Bildet man zu irgend einem der Brüche:

$$\overline{\begin{matrix} a & b & c \\ b' & c' & a'' \end{matrix}} \quad \overline{\begin{matrix} a & b & c \\ c' & a' & b'' \end{matrix}} \quad \overline{\begin{matrix} a & b & c \\ a' & b' & c'' \end{matrix}}$$

die Combinationen des Nenners, so erhält man ausser denselben noch 3 neue Symbole

$$\overline{\begin{matrix} a & b & c \\ a' & c' & b'' \end{matrix}} \quad \overline{\begin{matrix} a & b & c \\ c' & b' & a'' \end{matrix}} \quad \overline{\begin{matrix} a & b & c \\ b' & a' & c'' \end{matrix}}$$

welche 3 Sechsecke darstellen mit den betr. gegenüberliegenden Seiten:

B, C; B', C'; B'', C'';
C, A; C', A'; C'', A'';
A, B; A', B'; A'', B''.

Die Polaren der Schnittpunkte je eines Paares der Gegenseiten sind die in Nr. 1. und Nr. 2. schon vorgekommenen Geraden nur hier in veränderter Ordnung, nehmlich:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{A}_0 = 0,\ \mathfrak{A}'_0 = 0,\ \mathfrak{A}''_0 = 0; \\ \mathfrak{B}_0 = 0,\ \mathfrak{B}'_0 = 0,\ \mathfrak{B}''_0 = 0; \\ \mathfrak{C}_0 = 0,\ \mathfrak{C}'_0 = 0,\ \mathfrak{C}''_0 = 0; \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

woraus sich die den 3 Pascal'schen Geraden entsprechenden Bedingungsgleichungen ergeben [s. (13) und (14)]:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha\,\mathfrak{A}_0 + \alpha'\,\mathfrak{A}'_0 - \alpha''\,\mathfrak{A}''_0 = 0 \\ \beta\,\mathfrak{B}_0 + \beta'\,\mathfrak{B}'_0 - \beta''\,\mathfrak{B}''_0 = 0 \\ \gamma\,\mathfrak{C}_0 + \gamma'\,\mathfrak{C}'_0 - \gamma''\,\mathfrak{C}''_0 = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

Die Gleichungen der den 3 Sechsecken zugehörigen Pascal'schen Geraden erhält man ebenfalls durch bereits bekannte Stücke [(11) in Nr. 1 u. Nr. 2] ausgedrückt. Sie sind, wie aus den Symbolen

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & c' & b' \end{pmatrix} = 0, \begin{pmatrix} a & b & c \\ c' & b' & a' \end{pmatrix} = 0, \begin{pmatrix} a & b & c \\ b' & a' & c' \end{pmatrix} = 0$$

unmittelbar ersichtlich (s. Nr. 1. Anm.):

$$\left.\begin{array}{l} \alpha\,\mathfrak{A} - \alpha'\,\mathfrak{A}' + \alpha''\,\mathfrak{A}'' = 0 \\ \beta\,\mathfrak{B} - \beta'\,\mathfrak{B}' + \beta''\,\mathfrak{B}'' = 0 \\ \gamma\,\mathfrak{C} - \gamma'\,\mathfrak{C}' + \gamma''\,\mathfrak{C}'' = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

Wenn nun

$$r = 0,\ r' = 0,\ r'' = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

die Gleichungen dieser Pascal'schen Geraden vorstellen, so überzeugt man sich unter Berücksichtigung von (12) dass die Identität stattfindet:

$$r + r' + r'' = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

woraus erhellt, dass auch die drei (Pascal'schen) Linien (r), welche den letzteren drei Sechsecken entsprechen, sich in einem Punkte schneiden.

Da jede der beiden Gleichungen (18) u. (22) durch die andere bedingt ist, so folgt, dass sich die drei Pascal'schen Linien (r_0) in einem Punkte schneiden, wenn diess mit den drei Pascal'schen Linien (r) der Fall ist und umgekehrt.

Fassen wir die bis jetzt erlangten Resultate zusammen:

a. *Durch die neun in (1), (2), (3) dargestellten Geraden sind sechs Pascal'sche Sechsecke bestimmt.*

b. *Drei derselben werden durch die Verbindung von je zweien der durch die Seiten (1), (2), (3) gebildeten drei Dreiecke repräsentirt. Die Schnittpunkte entsprechender Dreiecksseiten liegen in einer Geraden (r_0). Die 3 Geraden (r_0) schneiden sich in einem Punkt.*

c. *Durch Verbindung je dreier Paare entsprechender Dreiecksseiten erhält man die drei übrigen Sechsecke. Die Schnittpunkte dieser Paare sind die entsprechenden Ecken der Dreiecke und liegen zu je dreien in einer Geraden (r). Die drei Geraden (r) schneiden sich in einem Punkt.*

d. *Die Verbindungslinien der gegenüberliegenden Ecken eines Sechsecks (Diagonalen) bilden ein Dreieck, durch dessen Ecken die in einem Punkt sich schneidenden Polaren der Schnittpunkte der 3 Paare gegenüberliegender Seiten des zugehörigen Sechsecks gehen. Die Polaren der Ecken des Diagonaldreiecks gehen aber durch die Schnittpunkte der dem Sechsecke zugehörigen Seitenpaare. Es gehören demnach 3 Paare harmonischer Polaren des Kreises zu einem Pascal'schen Sechseck* [s. (16)].

Nr. 4. Aus den 60 Symbolen der Pascal'schen Sechsecke erkennt man, dass dieselben in 15 Gruppen zu je vieren mit gemeinschaftlichem Diagonaldreieck zerfallen.

Aus einem der Symbole in der allgemeinen Form:

$$\frac{1\ 1'\ 1''}{1_0\ 1_1\ 1_2}$$ erhält man die drei zugehörigen:

$$\frac{1_0\ 1'\ 1''}{1\ 1_1\ 1_2},\quad \frac{1\ 1_1\ 1''}{1_0\ 1'\ 1_2},\quad \frac{1\ 1'\ 1_2}{1_0\ 1_1\ 1''}$$

durch successive Umkehrung der Verticalreihen. Demnach bestehen die Gleichungen der zugehörigen 4 Pascal'schen Geraden je aus denselben drei Summanden, welche nur durch die Vorzeichen von einander verschieden sind (s. Nr. 1. Anm.).

Bezeichnet man allgemein die 15 Geraden A, B, C .... mit L, die zugehörigen sinusse (α, β, γ . . .) mit λ, die durch die 15 Geraden bestimmten 45 Schnittpunkte mit u, die Polaren derselben mit U, so erhält man für die Pascal'schen Geraden R die Gleichungen einer Gruppe in den allgemeinen Formen (s. Nr. 1. Anm.):

$$\left.\begin{array}{l} \lambda U + \lambda' U' + \lambda'' U'' = 0 \\ -\lambda U + \lambda' U' + \lambda'' U'' = 0 \\ \lambda U - \lambda' U' + \lambda'' U'' = 0 \\ \lambda U + \lambda' U' - \lambda'' U'' = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

wo U, U', U'' die Quantitäten für die Gleichungen der Polaren der Eckpunkte u, u', u'' des aus den Diagonalseiten L, L', L'' gebildeten Dreiecks und λ, λ', λ'' die zugehörigen sinusse sind.

Für die vier den Pascal'schen Geraden der Gruppe zugehörigen Bedingungsgleichungen erhält man:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda(\lambda' L'' - \lambda'' L') + \lambda'(\lambda'' L - \lambda L'') + \lambda''(\lambda L' - \lambda' L) = 0 \\ \lambda(\lambda' L'' - \lambda'' L') - \lambda'(\lambda'' L + \lambda L'') + \lambda''(\lambda L' + \lambda' L) = 0 \\ \lambda(\lambda' L'' + \lambda'' L') + \lambda'(\lambda'' L - \lambda L'') - \lambda''(\lambda L' + \lambda' L) = 0 \\ -\lambda(\lambda' L'' + \lambda'' L') + \lambda'(\lambda'' L + \lambda L'') + \lambda''(\lambda L' - \lambda' L) = 0 \end{array}\right\} \quad (24)$$

oder, wenn $U_0 = 0$, $U'_0 = 0$, $U''_0 = 0$; $U_1 = 0$, $U'_1 = 0$, $U''_1 = 0$ die Gleichungen der Polaren der, den 4 Sechsecken der Gruppe zugehörigen, sechs Schnittpunkte gegenüberliegender Seiten sind:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda U_0 + \lambda' U'_0 + \lambda'' U''_0 = 0 \\ \lambda U_0 - \lambda' U'_1 + \lambda'' U''_1 = 0 \\ \lambda U_1 + \lambda' U'_0 - \lambda'' U''_1 = 0 \\ -\lambda U_1 + \lambda' U'_1 + \lambda'' U''_0 = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

Die 15 Geraden L lassen sich demnach 15mal zu je dreien combiniren, welche gemeinsame Diagonalen von vier zu einer Gruppe gehörigen Sechsecken sind. Die Polaren U der Eckpunkte dieser Dreiecke bilden conjugirte Dreiecke, und sind zu je dreien die Diagonalen eines vollständigen Vierecks. Die

sechs Ecken eines solchen vollständigen Vierecks sind die 6 Schnittpunkte der den 4 Sechsecken einer Gruppe entsprechenden Paare gegenüberliegender Seiten, und die Seiten desselben sind die vier zu einer Gruppe gehörigen Pascal'schen Geraden. Je ein Paar Gerade $\mathfrak{U}$ *bildet mit je einem Paar Geraden L und zugleich mit einem Paar Geraden R ein harmonisches Büschel.*

Je drei Gerade R bilden ein Dreieck, durch dessen Ecken die in einem Punkt sich schneidenden Polaren $\mathfrak{U}$ der Schnittpunkte $\mathfrak{u}$ der vierten Gerade R gehen.

Die Durchschnitte je einer in den Ecken dieses Dreiecks construirten vierten harmonischen $\mathfrak{U}$ mit der der Ecke gegenüberliegenden Seite R sind Punkte $\mathfrak{u}$ und bestimmen die vierte Gerade R.

Nr. 5. *Das aus den Seiten L, L', L'' gebildete Diagonaldreieck des Sechsecks ist zugleich auch Diagonaldreieck eines vollständigen Vierecks, dessen Ecken die Schnittpunkte der Geraden* $\mathfrak{U}_0$, $\mathfrak{U}'_0$, $\mathfrak{U}''_0$; $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}'_1$, $\mathfrak{U}''_1$ *mit den Geraden L, L', L'' sind und dessen Seiten die Gleichungen haben:*

$$\left.\begin{aligned} \frac{L}{\lambda} + \frac{L'}{\lambda'} + \frac{L''}{\lambda''} &= 0 \\ -\frac{L}{\lambda} + \frac{L'}{\lambda'} + \frac{L''}{\lambda''} &= 0 \\ \frac{L}{\lambda} - \frac{L'}{\lambda'} + \frac{L''}{\lambda''} &= 0 \\ \frac{L}{\lambda} + \frac{L'}{\lambda'} - \frac{L''}{\lambda''} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

Diese Geraden, welche allgemein mit ϱ bezeichnet werden mögen, haben ganz dieselbe Gleichungsform, wie die Pascal'schen Geraden R [s. (23)]. *Es gibt 60 Gerade* ϱ*, welche in 15 Gruppen zu je vieren zerfallen* (analog den Pascal'schen Geraden R), *und je drei Gerade* ϱ *schneiden sich in einem Punkt; es gibt also 20 solcher Schnittpunkte,* sowie wir 20 Steiner'sche Punkte kennen gelernt haben.

Beweis: Die Gleichungen der den Pascal'schen Sechsecken $\frac{a\ b\ c}{b'\ c'\ a''}$ $\frac{a\ b\ c}{c'\ a'\ b''}$ $\frac{a\ b\ c}{a'\ b'\ c'}$ zugehörigen Geraden ϱ sind bezüglich:

$$\left.\begin{aligned} \frac{A}{\alpha} + \frac{B}{\beta} + \frac{C}{\gamma} &= 0 \\ \frac{A'}{\alpha'} + \frac{B'}{\beta'} + \frac{C'}{\gamma'} &= 0 \\ \frac{A''}{\alpha''} + \frac{B''}{\beta''} + \frac{C''}{\gamma''} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

oder kürzer:

$$\varrho_0 = 0,\ \varrho'_0 = 0,\ \varrho''_0 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

Sollen diese drei Geraden sich in einem Punkt schneiden, so müssen sich 3 Faktoren μ, μ', μ'' derart finden lassen, dass man identisch hat:

$$\mu\,\varrho_0 + \mu'\,\varrho'_0 + \mu''\,\varrho''_0 = 0.$$

Nun kann man aber nach dem vorgehenden schreiben:

$$\begin{aligned} \varrho_0 - \varrho'_0 + \varrho''_0 = &\frac{A}{\alpha} - \frac{A'}{\alpha'} + \frac{A''}{\alpha''} \\ &+ \frac{B}{\beta} - \frac{B'}{\beta'} + \frac{B''}{\beta''} \\ &+ \frac{C}{\gamma} - \frac{C'}{\gamma'} + \frac{C''}{\gamma''} \\ &= \varrho + \varrho' + \varrho'' = 0 \quad \ldots \quad (29) \end{aligned}$$

wo $\varrho = 0$, $\varrho' = 0$, $\varrho'' = 0$ diejenigen Geraden ϱ bedeuten, welche den drei — aus den gegebenen durch Combinationen des Nenners — abgeleiteten Sechsecken (s. p. 23) zugehören.

Es ist daher identisch:

$$\varrho_0 - \varrho'_0 + \varrho''_0 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

Somit ist $\mu = -\mu' = \mu'' = 1$ und die Geraden (28) schneiden sich in einem Punkt.

Ist eine der Bedingungsgleichungen (29) und (30) erfüllt, so ist diess auch der Fall mit der anderen und umgekehrt.

Man kann für je drei der übrigen zusammengehörigen Sechsecke diesen Satz ebenso beweisen, oder auch durch Vertauschung der Buchstaben aus dem Vorhergehenden ableiten.

Nr. 6. Aus dem Gesetz, nach welchem man die Gleichungen (Symbole) der drei in einem Punkte sich schneidenden Pascal'schen Geraden bildet, geht hervor, dass jede derselben einer besonderen Gruppe (23) angehört. Bildet man nun zu

jeder der vier zu einer Gruppe gehörigen Pascal'schen Geraden die beiden übrigen, welche gemeinsamen Schnittpunkt (Steiner'schen Punkt) haben, so überzeugt man sich, dass die vier entsprechenden Steiner'schen Punkte in einer Geraden liegen. Eine solche Gerade heisst Steiner'sche Gerade.

Jeder Gruppe (23) entspricht eine Steiner'sche Gerade. Zu den 60 Pascal'schen Sechsecken gehören demnach 15 Steiner'sche Gerade. Da nun jede der drei in einem (Steiner'schen) Punkt sich schneidenden Pascal'schen Geraden einer besonderen Gruppe (23) angehört, so gehen durch jeden Steiner'schen Punkt drei Steiner'sche Gerade.

Berichtigung:

p. 10, Zeile 5 von oben ist die Formel zu lesen:

$$k = \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{2i \sin \frac{a-b}{2}}$$

Fig. 1.

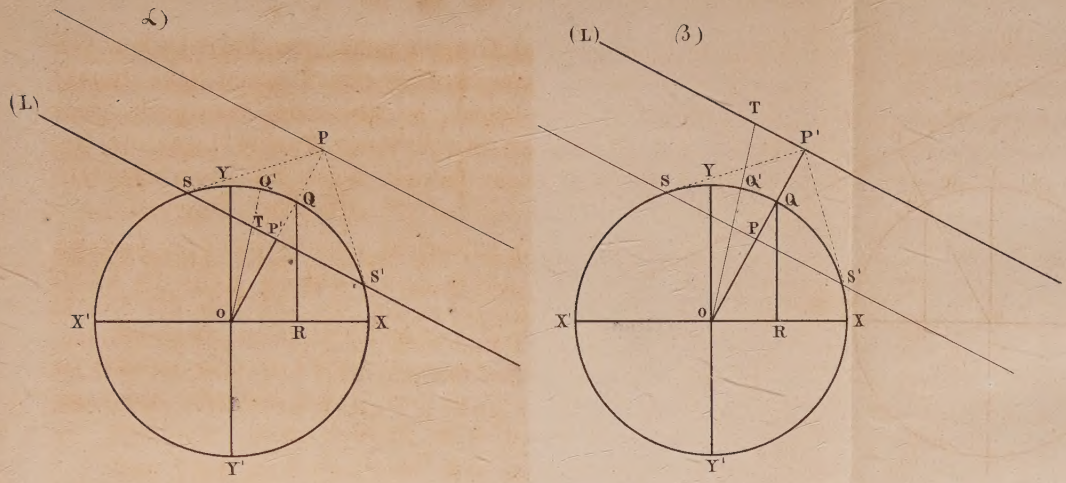
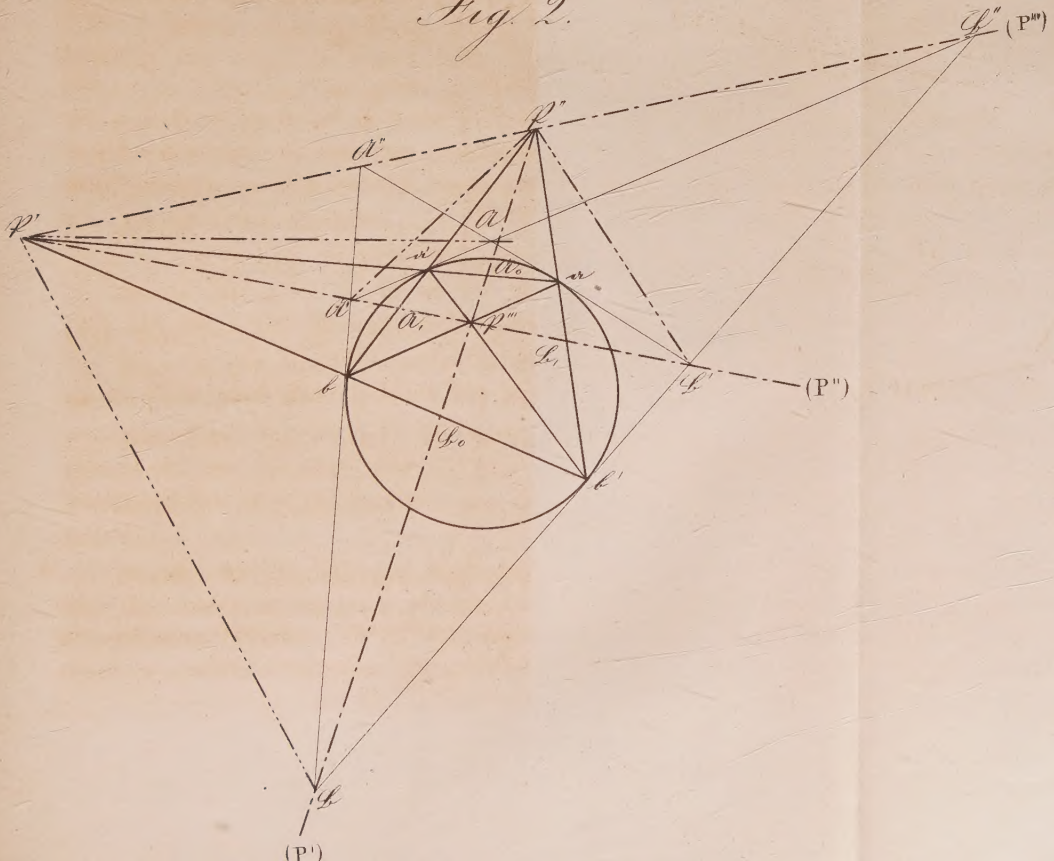
Fig. 2.